LE BI-NOME ET TRI-NÔME DE NEWTON EXHAUSTIF

0 Introduction

Ce dossier complet sur le binôme et trinôme de Newton, ainsi que sa généralisation, est un document pédagogique qui s'adresse aussi bien aux étudiants de niveau moyen qu'aux étudiants commençant l'université, ainsi qu'aux enseignants.

Ce thème du bi- et du tri-nôme nous donne un bon fil rouge pour cotoyer les thèmes et les chapitres suivants :

- Les simplifications de fractions
- Le calcul littéral
- Le triangle de Pascal (I) page 2
- Les puissances
- Les combinaisons (II.a) page 4
- Les factoriels page 4
- La démonstration par récurrence de la formule du binôme (difficile) (II.d.2) page 11
- Le symbole $\sum$ pour exprimer une somme (II.d.2.1) page 11
- Des trucs et astuces de calculs (IV) page 14
- Une application : la loi binômiale en probabilité (IV.b) page 16
- Des exercices d'entrainement du binôme (V) page 19
- Les trinômes (VI.a) page 20
- Les coefficients trinômiaux et anagrammes (VI.b) page 22
- La généralisation aux multinômes (VI.d) page 26
- Des exercices d'entraînement sur les trinômes (VI.e) page 26
- La correction des exercices (VII) page 27

Remarques : 1. Ci-dessus, il n'est mentionné que les chapitres importants.
2. Certains thèmes peuvent être approfondis par vous-mêmes par la suite.

Le but est de pouvoir calculer, développer et démontrer les méthodes de résolution du binôme de Newton :

$$(a+b)^n \quad \text{où a et b} \in \mathbf{R} \text{ et n} \in \mathbf{N}$$

L'étude peut être utile pour développer, par exemple, les cas suivants :

a) $12^5 = (10+2)^5$ avec a=10 et b=2 et n=5
b) $(x+2)^4$ avec a=x et b=2 et n=4
c) $(x-y)^7 = (x+(-y))^7$ avec a=x et b=-y et n=7

Voici le développement pour n=2 et n=3

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a^2+2ab+b^2)$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$$
$$= 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + 1\cdot b^3$$

Les coefficients 1 ; 3 ; 3 ; 1 s'appellent les coefficients binômiaux de ce développement.

Sans méthode, le calcul devient vite fastidieux pour des degrés plus élévés.

Ainsi voici la première méthode

I Le développement à l'aide du triangle de Pascal

Pour déterminer les coefficients bînomiaux, nous pouvons utiliser le triangle de Pascal (de Blaise Pascal, 1623 – 1662, inventeur, mathématicien, philosophe français).

Triangle de Pascal

$(a+b)^1$	**1**	a + b
$(a+b)^2$	**1 2 1**	$1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2$
$(a+b)^3$	**1 3 3 1**	$1\cdot a^3 + 3\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^3$
$(a+b)^4$	**1 4 6 4 1**	$1\cdot a^4 + 4\cdot a^3b + 6\cdot a^2b^2 + 4\cdot ab^3 + 1\cdot b^4$
$(a+b)^5$	**1 5 10 10 5 1**	$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

1 + 5 ; 5 + 10 ; 10 + 10 ; 10 + 5 ; 5 + 1

Suite

= 6 = 15 = 20 = 15 = 6

Pour créer le degré suivant, selon la même logique, on borde les bords par un 1, on prend les 2 nombres du degré inférieur et on les additionne comme ci-dessus.
Ce qui donne pour les coefficients du degré 6 :

1 6 15 20 15 6 1

et ainsi le développement devient :

$$(a+b)^6 = 1\cdot a^6b^0 + 6\cdot a^5b^1 + 15\cdot a^4b^2 + 20\cdot a^3b^3 + 15\cdot a^2b^4 + 6\cdot ab^5 + 1\cdot a^0b^6$$
$$= a^6 + 6a^5b^1 + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

On peut remarquer que :
a) les coefficients binômiaux sont symétriques
b) les puissances de « a » diminue à chaque fois de 1, passant de 6 à 0
c) les puissances de « b » croissent chaque fois de 1, passant de 0 à 6
d) l'addition des puissances dans un monôme donne toujours 6
6+0 = 6 ; 5+1=6 ; 4+2=6 ; 3+3=6 ; 2+4=6 ; 1+5=6 ; 0+6=6

Selon cette logique nous pouvons calculer le dévoppement $(a+b)^n \ \forall n$

Cependant le triangle de Pascal n'est pas très pratique si l'on décide de déterminer un ou des coefficients de termes précis d'un degré n.

Exemple : On veut déterminer le coefficient du monôme de degré 0 du développement suivant $\left(x+\frac{2}{x}\right)^4$ $\quad on\ pose\ a = x\ et\ b = \frac{2}{x}$

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)^4 = x^4 + 4x^3\cdot\left(\frac{2}{x}\right) + 6x^2\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^2 + 4x\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^3 + \left(\frac{2}{x}\right)^4$$
$$= x^4 + 4x^3\cdot\frac{2}{x} + 6x^2\cdot\frac{4}{x^2} + 4x\cdot\frac{8}{x^3} + \frac{16}{x^4}$$
$$= x^4 + 8x^2 + 24x^0 + \frac{32}{x^2} + \frac{16}{x^4}$$

Donc le coefficient du degré 0 est 24.

II Le développement à l'aide des combinaisons

Il existe une autre manière de développer $(a+b)^n$ à l'aide des combinaisons.

Exemple :

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}\cdot a^3 + \binom{3}{1}\cdot a^2b + \binom{3}{2}\cdot ab^2 + \binom{3}{3}\cdot b^3$$

II. a Les combinaisons

Voici comment se calcule les combinaisons $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

avec $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(3)\cdot(2)\cdot(1)$

Exemple : $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ (! s'appelle : factoriel et 5 ! se dit : « 5 factoriel »)

Une combinaison sert à déterminer le nombre de sous-groupes de k objets à l'aide de n objets à disposition sans s'occuper de l'ordre.

Exemple : Combien de sous-groupes de 3 personnes peut-on faire à l'aide de 5 personnes ?
(A)lice ; (B)ernard ; (C)laire ; (D)aniel ; (E)lise

Il y a : A-B-C ; A-B-D ; A-B-E ; A-C-D ; A-C-E ; A-D-E
B-C-D ; B-C-E ; B-D-E et C-D-E

Il a donc 10 sous-groupes de 3 personnes possibles.

On peut le calculer à l'aide des combinaisons :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 10\ \textit{possibilités}$$

5 = le nombre de personnes total
3 = le nombre de personne par sous-groupes

Les combinaisons servent aussi à déterminer le nombre d'anagrammes possibles (sans forcément de sens) à l'aide de 2 lettres « a » et « b » qui se répètent un certain nombre de fois.

Exemples :

1. Nous avons à disposition 5 lettres : 4 « b » et 1 « a »

   Voici les 5 anagrammes :

   abbbb; babbb; bbabb; bbbab; bbbba

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1! \cdot (5-1)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \textit{ possibilités}$$

   5 = 5 lettres et 1 = 1 « a »

   ou bien

   5 lettres et 4 « b »

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4! \cdot (5-4)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 5 \textit{ possibilités aussi}$$

   On remarque donc que $\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5$

2. Nous avons 5 lettres : 2 « a » et 3 « b »

   Voici les 10 anagrammes possibles :

   aabbb; ababb ; abbab; abbba ;
   baabb ; babab ; babba ;
   bbaab ; bbaba ;
   bbbaa

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10 \textit{ anagrammes possibles}$$

Pourquoi les combinaisons permettent-elles de calculer les coefficients du binôme de Newton ?

Exemple : $$(a+b)^3 = \underset{1\,ère}{(a+b)} \cdot \underset{2ème}{(a+b)} \cdot \underset{3ème \ parenthèse}{(a+b)}$$

Par exemple on cherche à voir de combien de manières on peut créer

a^2b *à l'aide de la* 1*ère ou* 2*ème ou* 3*ème parenthèse*

On prend le « a » de la 1ère parenthèse $a^{1ère}$
ou/et le « a » de la 2ème parenthèse $a^{2ème}$
ou/et le « a » de la 3ème parenthèse $a^{3ème}$

Cela donne $a^{1ère} \cdot a^{2ème} \cdot b^{3ème} = a \cdot a \cdot b = a^2 b$

$a^{1ère} \cdot b^{2ème} \cdot a^{3ème} = a \cdot b \cdot a = a^2 b$ => $3 \cdot a^2 b$

$b^{1ère} \cdot a^{2ème} \cdot a^{3ème} = b \cdot a \cdot a = a^2 b$

$$La\ combinaison\ devant\ a^2 b\ est\ 3 : \binom{3}{2} = \binom{3}{1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

II.b Le binôme de Newton général avec les combinaisons

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 b^n$$

Démontrons que les combinaisons correspondent aux coefficients binômiaux et vérifie la règle de construction du triangle de Pascal

$\binom{0}{0}$	1
$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$	$1 \quad 1$
$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$	$1 \quad 2 \quad 1$
$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$	$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$
$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$	$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$
$\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{4}$	$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$
$\ldots$	$\ldots$
$\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{1}\ldots\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k}\ldots\binom{n-1}{n-1}$	$1 \quad n-1 \quad \ldots \quad n-1 \quad 1$
$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2} \quad \ldots \binom{n-1}{k} \quad \ldots \quad \binom{n}{n}$	$1 \quad n \quad \ldots \quad n \quad 1$

On a bien
Les 1 sur les bords

$$\binom{4}{0} = \binom{4}{4} = \frac{4!}{0!\cdot 4!} = \frac{4!}{4!\cdot 0!} = 1 \; car \; 0! = 1$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{0!\cdot n!} = 1 \quad car \; 0! = 1$$

La valeur en 2ème position et en avant dernière position vaut n

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!\cdot(n-(n-1))!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!\cdot 1!} = n$$

$$car \; n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n = (n-1)!\cdot n$$

Les valeurs symétriques

$$\binom{4}{1} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{1! \cdot (4-1)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3!}{1! \cdot 3!} = 4$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \textit{ on ne aller plus loin sans connaître n}$$

II. c La démonstration de l'addition de 2 combinaisons

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

II.c.1 Exemple pour n=5

$$\binom{4}{0} \ \binom{4}{1} \ \binom{4}{2} \ \binom{4}{3} \ \binom{4}{4} \qquad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$\binom{5}{0} \ \binom{5}{1} \ \binom{5}{2} \ \binom{5}{3} \ \binom{5}{4} \ \binom{5}{4} \qquad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

On pose k=3

On voit déjà par le calcul que $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$ $\qquad 6 + 4 = 10$

car $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$ $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3!}{1! \cdot 3!} = \frac{4}{1!} = 4$ $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

Visualisons cette égalité $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$

Soit 5 personnes : A ; B ; C ; D ; E

Groupes de 3 personnes sur 5 sans tenir compte de l'ordre

$\binom{5}{3}$ A-B-C ; A-B-D ; A-B-E ; A-C-D ; A-C-E ; A-D-E ;

B-C-D ; B-C-E ; B-D-E ; C-D-E

Soit 10 groupes

Groupe de 3 personnes avec E, par exemple, pris d'office

$\binom{4}{2}$ A-B-E ; A-C-E ; A-D-E ; B-C-E ; B-D-E ; C-D-E

Soit 6 groupes

Groupe de 3 personnes avec A ; B ; C ; D sans E

$\binom{4}{3}$ A-B-C ; A-B-D ; A-C-D ; B-C-D

Soit 4 groupes

On voit aussi que l'égalité est vérifiée.

<u>II.c.2 La preuve intuive avec n objets</u>

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$\binom{n}{k}$ On choisit k objets parmis n

$\binom{n-1}{k}$ On marque un objet d'une * parmis les n objets et on fait des groupes de k objets sans cet objet marqué *

$\binom{n-1}{k-1}$ On prend d'office l'objet * et on complète par k-1 objets sur les n-1 objets restant.

On a bien que l'égalité ci-dessus est vérifiée.

<u>II.c.3 La preuve algébrique</u>

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

i)

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-1-(k-1))!}$$

On a que

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot (n-1)\cdot n = (n-1)!\cdot n$$
$$k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot (k-1)\cdot k = (k-1)!\cdot k$$
$$(n-k)! = (n-k-1)!\cdot (n-k)$$
$$(n-1-(k-1))! = (n-k)!$$

Nous allons mettre la partie de droite de i) au même dénominateur

On multiplie au numérateur et dénominareur par (n-k)

$$\frac{(n-1)!}{k!\cdot (n-1-k)!} = \frac{(n-1)!\cdot (n-k)}{k!\cdot (n-k)!} = \frac{(n-k)\cdot (n-1)!}{k!\cdot (n-k)!}$$

On multiplie au numérateur et dénominareur par k

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot (n-1-(k-1))!} = \frac{k\cdot (n-1)!}{k!\cdot (n-k)!}$$

ce qui donne

$$\frac{(n-1)!}{k!\cdot (n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot (n-1-(k-1))!} = \frac{(n-k)\cdot (n-1)!}{k!\cdot (n-k)!} + \frac{k\cdot (n-1)!}{k!\cdot (n-k)!}$$

$$\frac{(n-k)\cdot (n-1)!}{k!\cdot (n-k)!} + \frac{k\cdot (n-1)!}{k!\cdot (n-k)!} = \frac{n\cdot (n-1)! - k\cdot (n-1)! + k\cdot (n-1)!}{k!\cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k!\cdot (n-k)!} \quad cqfd$$

II.d La démonstration de la formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}\cdot a^n b^0 + \binom{n}{1}\cdot a^{n-1} b + \binom{n}{2}\cdot a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{i}\cdot a^{n-i} b^i + \ldots + \binom{n}{n-1}\cdot a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}\cdot a^0 b^n$$

II.d.1 La preuve intuitive

$$(a+b)^n = (a+b)\cdot (a+b)\cdot (a+b)\cdot \ldots\cdot (a+b) \quad multiplication\ de\ n\ (\,)$$

$$\binom{n}{1}\ de\ a^{n-1}b\ sachant\ que \binom{n}{1} = n$$

D’abord on prend le « b » dans la première parenthèse et on complète avec n-1 « a » pris dans les autres parenthèses:

$$b \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = b \cdot a^{n-1} = a^{n-1} \cdot b$$

Ensuite on prend le « b » dans la deuxième parenthèse et les « a » dans les autres parenthèses :

$$a \cdot b \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^{n-1} \cdot b$$

Ainsi de suite jusqu'à ce que « b » se trouve à la fin :

$$a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot b = a^{n-1} \cdot b$$

Donc on a pris « b » dans n parenthèses différentes. Donc il y a n fois le même terme, ce qui donne :

$$n \cdot a^{n-1} \cdot b$$

$$\binom{n}{i} \, de \; a^{n-i} b^{i}$$

On prend les « b » dans i parenthèses sur les n et on complète avec n-i « a » des autres parenthèses Ce qui donne bien $\binom{n}{i}$ possibilités

II.d.2 La démonstration par récurrence

$$(a+b)^{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^{i}$$

II.d.2.1 L'approche du symbole sigma

Ceci peut s'écrire plus simplement à l'aide du symbole

$\sum$ *de la somme*

Exemples :

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & i=0 & & i=1 & & i=2 & & i=3 & & i=4 & \\ \sum_{i=0}^{4} 5 & = & 5 & + & 5 & + & 5 & + & 5 & + & 5 & = 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & i=1 & & i=2 & & i=3 & & i=4 \\ \sum_{i=1}^{4} 3 \cdot i^{2} & = & 3 \cdot 1^{2} & + & 3 \cdot 2^{2} & + & 3 \cdot 3^{2} & + & 3 \cdot 4^{2} \end{array} = 3 \cdot \sum_{i=1}^{4} i^{2} = 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 16 = 90$$

Donc la formule du binôme

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n$$

peut s'écrire plus simplement à l'aide du symbole sigma

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i$$

Démontrons cette formule

II.d.2.2 On vérifie

Pour n=1

$$(a+b)^1 = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} \cdot a^{1-i} \cdot b^i = \binom{1}{0} \cdot a^1 b^0 + \binom{1}{1} \cdot a^0 b^1 = a+b$$

Pour n=2

$$(a+b)^2 = \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} \cdot a^{2-i} \cdot b^i$$

$$= \binom{2}{0} \cdot a^2 \cdot b^0 + \binom{2}{1} \cdot a^1 \cdot b^1 + \binom{2}{2} \cdot a^0 \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ok$$

II.d.2.3 On suppose vrai pour n=k

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot a^{k-i} \cdot b^i$$

II.d.2.4 On démontre que c'est vrai pour n=k+1

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \cdot a^{k+1-i} \cdot b^i \quad \textit{à démontrer}$$

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)\cdot(a+b)^k$$

$$= (a+b)\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot a^{k-i}\cdot b^i$$

$$= a\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot a^{k-i}\cdot b^i + b\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot a^{k-i}\cdot b^i$$

Comme le « a » et le « b » ne dépendent pas de l'indice i, on peut les rentrer sous la somme.

$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot a\cdot a^{k-i}\cdot b^i + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot a^{k-i}\cdot b\cdot b^i$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot a^{k+1-i}\cdot b^i + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot a^{k-i}\cdot b^{i+1}$$

La première somme est décomposée en posant i=0 + reste de la somme
Dans la deuxième somme on fait une substitution on pose u=i+1
Donc i=u-1 et quand i=0 -> u=1 et quand i=k -> u=k+1

$$= \binom{k}{0}\cdot a^{k+1}\cdot b^0 + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\cdot a^{k+1-i}\cdot b^i + \sum_{u=1}^{k+1}\binom{k}{u-1}\cdot a^{k-u+1}\cdot b^u$$

Dans la deuxième somme on repose i=u

$$= a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\cdot a^{k+1-i}\cdot b^i + \sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}\cdot a^{k+1-i}\cdot b^i$$

On decompose la deuxième somme en posant i=k+1 + la somme

$$= a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\cdot a^{k+1-i}\cdot b^i + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i-1}\cdot a^{k+1-i}\cdot b^i + \binom{k}{k}\cdot a^0\cdot b^{k+1}$$

Comme les 2 sommes vont de i=1 à k on peut tout mettre sous la même somme.

$$= a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\left[\binom{k}{i}\cdot a^{k+1-i}\cdot b^{i} + \binom{k}{i-1}\cdot a^{k+1-i}\cdot b^{i}\right] + \binom{k}{k}\cdot a^{0}\cdot b^{k+1}$$

$$= a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\left[\left\{\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}\right\}\cdot a^{k+1-i}\cdot b^{i}\right] + \binom{k}{k}\cdot a^{0}\cdot b^{k+1}$$

Nous avons démontré précédemment que

$\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \binom{k+1}{i}$ et $a^{k+1} = \binom{k+1}{0}\cdot a^{k+1}\cdot b^{0}$ et $\binom{k}{k}\cdot a^{0}\cdot b^{k+1} = \binom{k+1}{k+1}\cdot a^{0}\cdot b^{k+1}$

$$= \binom{k+1}{0}\cdot a^{k+1}\cdot b^{0} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k+1}{i}\cdot a^{k+1-i}\cdot b^{i} + \binom{k+1}{k+1}\cdot a^{0}\cdot b^{k+1}$$

Ces deux termes de gauche et de droite peuvent être rajouté à la somme en faisant varier l'indice de la somme de i de 0 à k+1.

$$= \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}\cdot a^{k+1-i}\cdot b^{i} \quad cqfd$$

Donc, par héritage, la formule est vraie quel que soit n

IV.Des trucs et astuces de calculs

Nous avons que

$$(a+b)^{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} a^{n-i}\cdot b^{i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} b^{n-i}\cdot a^{i} = (b+a)^{n}$$

$$(x-y)^{n} = (x+(-y))^{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} x^{n-i}\cdot(-y)^{i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot(-1)^{i}\cdot x^{n-i}\cdot y^{i}$$

Exemple :

$$(5-3)^{4} = \sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}\cdot 5^{4-i}\cdot(-3)^{i} = \sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}\cdot 5^{4-i}\cdot(-1)^{i}\cdot(3)^{i}$$

$$= \binom{4}{0}\cdot 5^4 + \binom{4}{1}\cdot 5^3\cdot(-1)^1\cdot 3 + \binom{4}{2}\cdot 5^2\cdot(-1)^2\cdot 3^2 + \binom{4}{3}\cdot 5\cdot(-1)^3\cdot 3^3 + \binom{4}{4}\cdot(-1)^4\cdot 3^4$$

On peut utiliser ici le triangle de Pascal pour calculer les coefficients pour aller plus vite
1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$$= 1\cdot 5^4 + 4\cdot 5^3\cdot(-1)^1\cdot 3 + 6\cdot 5^2\cdot(-1)^2\cdot 3^2 + 4\cdot 5\cdot(-1)^3\cdot 3^3 + 1\cdot(-1)^4\cdot 3^4$$
$$= 625 - 4\cdot 125\cdot 3 + 6\cdot 25\cdot 9 - 4\cdot 5\cdot 27 + 1\cdot 81$$
$$= 625 - 1500 + 1350 - 540 + 81$$
$$= 2056 - 2040 = 16$$

IV.a Développement particulier qui amène à des résultats intéressants

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot 1^{n-i}\cdot x^i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot x^i$$

i) Ce qui nous permet de calculer facilement

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$$

Comment ? En posant x=1
Donc

$$(1+1)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot 1^i$$

c-à-d que $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$

Exemple :

$$\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i} = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1+3+3+1 = 8 = 2^3 \ ok$$

ii) Ce qui nous permet de calculer facilement

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\cdot\binom{n}{i}$$

Comment ?
En posant x=-1

Donc $(1+(-1))^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i}$

c-à-d que $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} = (1+(-1))^n = (0)^n = 0$

Exemple :

$$\sum_{i=0}^{3} (-1)^i \cdot \binom{3}{i} = \binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} = 1-3+3-1 = 0 \; ok$$

iii) De même on peut calculer facilement

$$\sum_{i=0}^{n} (2)^i \cdot \binom{n}{i} \; ; \; \sum_{k=0}^{n} (3)^k \cdot \binom{n}{k} \; ; \; \sum_{k=0}^{n} (a)^k \cdot \binom{n}{k}$$

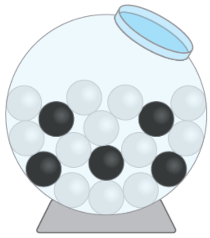
Grâce au binôme de Newton, intéressant n'est-ce pas ? A vous de jouer.

IV.b Une application : la loi binomiale en probabilité

Une application du binôme de Newton est en probabilté la loi binomiale.

IV.b.1 Une approche de la loi binomiale par un exmple

Soit une urne avec 5 boules noires et 12 boules blanches.



On tire une boule, on regarde sa couleur puis on la replace dans l'urne et on répète cela 3 fois(on appelle cela: « 4 tirages avec remise »)
On se pose la question :

Quelle est la probabilité d'avoir 3 noires sur les 4 tirages ?

Donc 3 noires et 1 blanche que nous pouvons schématiser par les anagrammes suivant ou bien par les 4 chemins suivant dans un arbre :

« nnnb » : d'abord 3 boules noires, puis une blanche
« nnbn » : 2 boules noire, puis une blanche, puis une noire
« nbnn » : une noire, puis une blanche, puis 2 noires

« bnnn » : une blanche, puis 3 noires.

A chaque tirage :

- la probabilité de tirer une noire est de $\frac{5}{17}$
- la probabilité de tirer une blanche est de $\frac{12}{17}$

Probabilité d'avoir 3 noire = Probabilité(nnnb) +Probabilité(nnbn) +Probabilité(nbnn) +Probabilité(bnnn) +Probabilité(nnnb)

$$= \frac{5}{17}\cdot\frac{5}{17}\cdot\frac{5}{17}\cdot\frac{12}{17}+\frac{5}{17}\cdot\frac{5}{17}\cdot\frac{12}{17}\cdot\frac{5}{17}+$$

$$\frac{5}{17}\cdot\frac{12}{17}\cdot\frac{5}{17}\cdot\frac{5}{17}+\frac{12}{17}\cdot\frac{5}{17}\cdot\frac{5}{17}\cdot\frac{5}{17}$$

$$= 4\cdot\frac{5}{17}\cdot\frac{5}{17}\cdot\frac{5}{17}\cdot\frac{12}{17} = \binom{4}{3}\cdot\left(\frac{5}{17}\right)^3\cdot\frac{12}{17}$$

$$= 0{,}072 = 7{,}2\%$$

Si nous voulons cumuler les probabilités suivantes :

P(0 noire et 4 blanches) + P(1 noire et 3 blanches) + P(2 noires et 2 blanches) + P(3 noires et 1 blanche) + P(4 noires)

$$= \binom{4}{0}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^0\cdot\left(\frac{12}{17}\right)^4+\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^1\cdot\left(\frac{12}{17}\right)^3+\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^2\cdot\left(\frac{12}{17}\right)^2+$$

$$\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^3\cdot\left(\frac{12}{17}\right)^1+\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^4\cdot\left(\frac{12}{17}\right)^0$$

$$= \sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^i\cdot\left(\frac{12}{17}\right)^{4-i}$$

Et d'après **la formule du binôme** :

$$= \sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^i\cdot\left(\frac{12}{17}\right)^{4-i} = \left(\left(\frac{5}{12}\right)+\left(\frac{12}{12}\right)\right) = \frac{17}{17} = 1$$

Ce qui nous donne bien une loi de probabilité.

IV.b.2 La loi binomiale

La loi binomiale s'utilise uniquement avec 2 probabilités qui ne varient pas dans les événements.

Nous parlons d'une manière générale :

- Probabilité de succès p (la probabilité à laquelle on s'intéresse : ci-dessus les boules noires)

- Probabilité d'échec q (la probabilité à laquelle on ne s'intéresse pas vraiment : ci-dessus les boules blanches)

Ces 2 probabilités doivent rester constantes dans les répétitions et leur somme vaut toujours 1 (p+q=1)

Exemples:

- Les probabilités de tirer des boules noires
  dans une urne à 2 couleurs, avec remise.

- Les probabilités d'avoir des filles dans une famille sur un certain nombre d'enfants.
  Exemple : La probabilité d'avoir 3 filles dans une famille de 5 enfants . (probabilité d'avoir une fille =0.6 et p. garcon =0.4)
  Probabilité = $\binom{5}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 = 10 \cdot 0{,}216 \cdot 0{,}16 = 0{,}3456 \cong 34{,}6\%$
- Les probabilités d'avoir 3 fois 6 sur 5 lancés d'un dé à 6 faces
  Probabilité d'avoir un 6= $\frac{1}{6}$ Prob. d'un autre nombre= $\frac{5}{6}$
  Probabilité = $\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0{,}0322 \cong 3{,}2\%$

IV.b.2.1 La notation standard

Soit n épreuves identiques et indépendantes, la probabilité d'avoir k succès sera de

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

où X est une variable aléatoire qui compte le nombre de succès k.

Et la somme de ces probabilités P(X=k) où k varie de 0 à n vaut 1

Grâce au binôme de Newton nous avons

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1 \quad car\ p + q = 1$$

V. Exercices d'entraînement sur le binôme avec les corrections à la fin du dossier

Exercice 1

Calculez le résultat de 8^5 à l'aide du binôme

Indication : Transformer le 8 en une différence de 2 nombres choisis de manière astucieuse pour vous simplifier le calcul.

Exercice 2

Calculez le développement de

$(x+2)^6$

Exercice 3

Trouvez le coefficient de $x^6 \cdot y^7$ dans le développemt de $(x+y)^{13}$

Exercice 4

Calculez le développement de

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^7$$

Exercice 5

Trouvez le coefficient du monôme de degré 1

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^8$$

Indication : Trouver l'indice i de la somme pour avoir sous la somme un polynôme de degré 1

Exercice 6

Trouvez le coefficient du monôme de degré 3 de

$$x^4 \cdot (x^2-\frac{2}{x^3})^7$$

Indication : x^4 peut rentrer sous la somme comme il ne dépend pas de i

Exercice 7

Calculez $\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}$

Exercice 8

Calculez $\sum_{i=0}^{5} i\cdot\binom{n}{i}$

Indication : S'inspirer de la fonction $f(x)=(1+x)^n$ et de la formule du Binôme et de la dérivée
ou bien
S'inspirer de $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$ et du calcul des combinaisons

VI. Les multi-nômes de Newton

VI. a Les trinômes de Newton

Nous allons nous s'intéresser comment calculer les coefficients trinômiaux ainsi que leur monôme correspondant du développement de

$$(a+b+c)^n \quad \forall n\ entier \geq 0$$

Exemples :

Si n=2

$$(a+b+c)^2=(a+b+c)\cdot(a+b+c)$$

En choisissant une lettre dans
- la première parenthèse
- puis dans la deuxième parenthèse

En développant on a comme possibilités

Forme en x^2	*Forme en xy*
aa	ab + ba
bb	bc + cb
cc	ca + ac
$a^2+b^2+c^2$	2ab + 2bc + 2ac

Donc

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

qui peut s'écrire

$$= \binom{2}{2\ 0\ 0} \cdot a^2 \cdot b^0 \cdot c^0 + \binom{2}{0\ 2\ 0} \cdot a^0 \cdot b^2 \cdot c^0 + \binom{2}{0\ 0\ 2} \cdot a^0 \cdot b^0 \cdot c^2 +$$

$$\binom{2}{1\ 1\ 0} \cdot a^1 \cdot b^1 \cdot c^0 + \binom{2}{1\ 0\ 1} \cdot a^1 \cdot b^0 \cdot c^1 + \binom{2}{0\ 1\ 1} \cdot a^0 \cdot b^1 \cdot c^1$$

$$= \sum_{i,j,k} \binom{2}{i\ j\ k} \cdot a^i \cdot b^j \cdot c^k \text{ avec } i,j,k \text{ variant tel que}$$

$$0 \le i;j;k \le 2 \text{ et } i+j+k=2$$

Si n=3

$$(a+b+c)^3 = (a+b+c)\cdot(a+b+c)\cdot(a+b+c)$$

En choisissant une lettre dans

- la première parenthèse
- puis dans la deuxième parenthèse
- puis dans la troisième parenthèse

En développant on a comme possibilités

Forme en x^3	*Forme en* x^2y *et* xy^2	*Forme en* y^2z *et* yz^2	*Forme en* x^2z *et* xz^2	*Forme en* xyz
aaa	aab + bba	bbc + bcc	aac + cca	abc + acb
bbb	aba + bab	bcb + cbc	aca + cac	bac + cab
ccc	baa + abb	cbb + ccb	caa + acc	bca + cba
$a^3+b^3+c^3$	$3a^2b+3ab^2$	$3b^2c+3bc^2$	$3a^2c+3ac^2$	$6abc$

Donc

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+$$

$$3bc^2+3c^2a+3ca^2+6abc$$

qui peut s'écrire

$$= \binom{3}{3\ 0\ 0} \cdot a^3 \cdot b^0 \cdot c^0 + \binom{3}{0\ 3\ 0} \cdot a^0 \cdot b^3 \cdot c^0 + \binom{3}{0\ 0\ 3} \cdot a^0 \cdot b^0 \cdot c^3 +$$

$$\binom{3}{2\ 1\ 0} \cdot a^2 \cdot b^1 \cdot c^0 + \binom{3}{1\ 2\ 0} \cdot a^1 \cdot b^2 \cdot c^0 +$$

$$\binom{3}{0\ 2\ 1} \cdot a^0 \cdot b^2 \cdot c^1 + \binom{3}{0\ 1\ 2} \cdot a^0 \cdot b^1 \cdot c^2 +$$

$$\binom{3}{2\ 0\ 1}\cdot a^2\cdot b^0\cdot c^1+\binom{3}{1\ 0\ 2}\cdot a^1\cdot b^0\cdot c^2+$$
$$\binom{3}{1\ 1\ 1}\cdot a^1\cdot b^1\cdot c^1$$

plus simplement

$$=\sum_{i,j,k}\binom{3}{i\ j\ k}\cdot a^i\cdot b^j\cdot c^k \ avec\, i,j,k \text{ var} iant\ tq.$$
$$0\le i;j;k\le 3\ et\ i+j+k=3$$

avec par exemple :

$$\binom{3}{2\ 1\ 0}=\frac{3!}{2!\cdot 1!\cdot 0!}=\frac{3\cdot 2!}{2!\cdot 1}=3 \quad et \quad \binom{3}{1\ 1\ 1}=\frac{3!}{1!\cdot 1!\cdot 1!}=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 1\cdot 1}=6$$

VI. a.1 La formule générale du trinôme

$$(a+b+c)^n=\sum_{i,j,k}\binom{n}{i\ j\ k}\cdot a^i\cdot b^j\cdot c^k\ avec\ i,j,k \text{ var} iant\ tel\ que$$
$$o\le i;j;k\le n\ et\ i+j+k=n$$

VI. b Une étude approfondie des coefficients tri-nômiaux

$$\binom{n}{i\ j\ k}=\frac{n!}{i!\cdot j!\cdot k!}$$

Exemple 1 : n=10 alors i+j+k=10 donc exemple i=6, j=3 et k=1

$$\binom{10}{6\ \ 3\ \ 1}=\frac{10!}{6!\cdot 3!\cdot 1!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}=840$$

Cela correspond aux anagrammes d'un mot de 10 lettres ayant, par exemple :

6 fois la lettre « a »
3 fois la lettre « b »
1 fois la lettre « c »

Donc le mot suivant : « aaaaaabbbc » a 840 anagrammes.

Par exemple : « bbbcaaaaaa », « bababacaaa »

Exemple 2 : Le mot « anagramme » a combien d'anagrammes ?

Comme il y a 3 « a » et 2 « m » qui se répètent cela donne
« aaammngre »

$$\binom{9}{3 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1} = \frac{9!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 30'240 \quad anagrammes$$

Avec un mot de 9 lettres : *abcdefghi »
on peut imaginer 9 cases :

Comme nous avons 9 lettres à disposition,
Nous pouvons mettre dans
- la première case 9 lettres
- la deuxième case plus que 8 lettres
- la troisième case plus que 7 lettres

ainsi de suite jusqu'à 1 dans la dernière case
et on les multiplie, ce qui donne

$$9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 9! \quad anagrammes$$

Puique que dans « anagramme » il y a 3 « a » qui se répètent il faut diviser par 3 ! car la permutation de 3 lettres est de 3 ! = 6,
c-à-d que si nous permutons les 3 « a » dans un anagramme cela ne change pas le mot, ainsi que de permuter les 2 « m ».

VI. b.1 Une autre formulation

$$\binom{n}{i\ j\ k} = \binom{n}{i}\cdot\binom{n-i}{j}\cdot\binom{n-i-j}{k} = \binom{n}{i}\cdot\binom{n-i}{j} \; car\ i+j+k=n$$

A démontrer par vous même !

VI. c Un exemple complet du trinôme à la puissance 6 avec leurs anagrammes

Développons $(a+b+c)^6$ *dans cet esprit la.*

$$(a+b+c)^6 = (a+b+c)\cdot(a+b+c)\cdot(a+b+c)\cdot(a+b+c)\cdot(a+b+c)\cdot\cdot(a+b+c)$$

On aura les types de mots suivant, avec leurs anagrammes respectifs, en prenant chaque fois une lettre par parenthèse.

aaaaaa	bbbbbb	cccccc
aaaaab	bbbbbc	aaaaac
bbbbba	cccccb	ccccca
aaaabb	bbbbcc	aaaacc
bbbbaa	ccccbb	ccccaa
aaaabc	bbbbac	ccccab
aaabbb	bbbccc	aaaccc
aaabbc	aaabcc	
aabbbc	abbbcc	
aabccc	abbccc	
aabbcc		

Voilà le nombre d'anagrammes que cela donne pour les 2 mots suivant :

$$aaabbc \quad \binom{6}{3 \quad 2 \quad 1} = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 60 \quad anagrammes$$

$$aaaabc \quad \binom{6}{4 \quad 1 \quad 1} = \frac{6!}{4!\cdot 1!\cdot 1!} = 30 \quad anagrammes$$

Développons

$$(a+b+c)^6 = \sum_{i,j,k} \binom{6}{i \quad j \quad k} \cdot a^i \cdot b^j \cdot c^k$$

$$0 \le i\,,\, j\,,\, k \le 6 \;\; et \;\; i+j+k=6$$

$$\begin{aligned}(a+b+c)^6 = \binom{6}{6\,0\,0}\cdot a^6\cdot b^0\cdot c^0 + \binom{6}{0\,6\,0}\cdot a^0\cdot b^6\cdot c^0 + \binom{6}{0\,0\,6}\cdot a^0\cdot b^0\cdot c^6 +\\ \binom{6}{5\,1\,0}\cdot a^5\cdot b^1\cdot c^0 + \binom{6}{1\,5\,0}\cdot a^1\cdot b^5\cdot c^0 +\\ \binom{6}{0\,5\,1}\cdot a^0\cdot b^5\cdot c^1 + \binom{6}{0\,1\,5}\cdot a^0\cdot b^1\cdot c^5 +\\ \binom{6}{5\,0\,1}\cdot a^5\cdot b^0\cdot c^1 + \binom{6}{1\,0\,5}\cdot a^1\cdot b^0\cdot c^5 +\end{aligned}$$

$$\binom{6}{4\,2\,0}\cdot a^4\cdot b^2\cdot c^0+\binom{6}{2\,4\,0}\cdot a^2\cdot b^4\cdot c^0+$$
$$\binom{6}{0\,4\,2}\cdot a^0\cdot b^4\cdot c^2+\binom{6}{0\,2\,4}\cdot a^0\cdot b^2\cdot c^4+$$
$$\binom{6}{2\,0\,4}\cdot a^2\cdot b^0\cdot c^4+\binom{6}{4\,0\,2}\cdot a^4\cdot b^0\cdot c^2+$$
$$\binom{6}{4\,1\,1}\cdot a^4\cdot b^1\cdot c^1+\binom{6}{1\,4\,1}\cdot a^1\cdot b^4\cdot c^1+\binom{6}{1\,1\,4}\cdot a^1\cdot b^1\cdot c^4+$$
$$\binom{6}{3\,3\,0}\cdot a^3\cdot b^3\cdot c^0+\binom{6}{3\,0\,3}\cdot a^3\cdot b^0\cdot c^3+\binom{6}{0\,3\,3}\cdot a^0\cdot b^3\cdot c^3+$$
$$\binom{6}{3\,2\,1}\cdot a^3\cdot b^2\cdot c^1+\binom{6}{3\,1\,2}\cdot a^3\cdot b^1\cdot c^2+$$
$$\binom{6}{2\,3\,1}\cdot a^2\cdot b^3\cdot c^1+\binom{6}{1\,3\,2}\cdot a^1\cdot b^3\cdot c^2+$$
$$\binom{6}{2\,1\,3}\cdot a^2\cdot b^1\cdot c^3+\binom{6}{1\,2\,3}\cdot a^1\cdot b^2\cdot c^3+$$
$$\binom{6}{2\,2\,2}\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2$$

Voilà les valeurs de ces 7 types, les autres valent les mêmes valeurs

$\binom{6}{0\,6\,0}=1$; $\binom{6}{5\,1\,0}=\frac{6\cdot 5!}{5!}=6$; $\binom{6}{4\,0\,2}=\frac{6\cdot 5}{2}=15$; $\binom{6}{3\,3\,0}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2}=20$;
$\binom{6}{4\,1\,1}=\frac{6\cdot 5}{1}=30$; $\binom{6}{3\,2\,1}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{2}=60$; $\binom{6}{2\,2\,2}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{2\cdot 2}=90$

Donc

$$\begin{aligned}(a+b+c)^6 = {} & a^6+b^6+c^6+6\cdot(a^5b+ab^5+b^5c+bc^5+a^5c+ac^5)+\\ & 15\cdot(a^4b^2+a^2b^4+b^4c^2+b^2c^4+a^4c^2+a^2c^4)+\\ & 30\cdot(a^4b\ c+a\ b^4c+abc^4)+\\ & 20\cdot(a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3)+\\ & 60\cdot(a^3b^2c^1+a^3b^1c^2+a^2b^3c^1+a^1b^3c^2+a^2b^1c^3+a^1b^2c^3)+\\ & 90\cdot(a^2b^2c^2)\end{aligned}$$

Vérification simple

On pose a=1; b=1; c=1

Est-ce que l'égalité est vérifiée avec ces valeurs ?

A gauche

$$3^6 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 81 \cdot 9 = 729$$

A droite

$$3 + 6 \cdot (6) + 15 \cdot (6) + 30 \cdot (3) + 20 \cdot (3) + 60 \cdot (6) + 90 \cdot (1)$$
$$= 3 + 36 + 90 + 90 + 60 + 360 + 90 = 729 \quad ok$$

VI.d La généralisation aux multi-nômes

De la même manière vous pouvez calculer

$$(a+b+c+d)^7 = \sum_{i,j,k} \begin{pmatrix} & 7 & & \\ i & j & k & l \end{pmatrix} \cdot a^i \cdot b^j \cdot c^k \cdot d^l$$

-

$$0 \le i\ , j\ , k\ , l \le 7\ et\ i + j + k = 7$$

avec l’étude des mots de 7 lettres , exemple « aabbccd »,
que vous pouvez développer comme entraînement.

Ou bien nous pouvons généraliser la formule avec k termes

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum \begin{pmatrix} & n & & \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_k \end{pmatrix} \cdot x^{l_1} \ldots \cdot x^{l_k}$$

$$0 \le l_1\ , \ldots , l_k \le n\ et\ l_1 + l_2 + \quad \ldots \quad + l_k = n$$

Formule qui vous avez apprivoisé et qui vous paraît claire et utilisable maintenant ! Bravo !

VI.e Exercices sur les trinômes avec la correction à la fin du dossier

Exercice 9

Soit $(a+b+c)^{13}$

Calculez les coefficients de $a^6 \cdot b^7$ et de $a^6 \cdot b^4 \cdot c^3$ en développant.

Exercice 10

Développez $(a-2b+c)^5$

VII La correction des exercices

Correction de l'exercice 1

$$8^5 = (10-2)^5$$
$$= \binom{5}{0}\cdot 10^5 + \binom{5}{1}\cdot 10^4\cdot(-2) + \binom{5}{2}\cdot 10^3\cdot(-2)^2 + \binom{5}{3}\cdot 10^3\cdot(-2)^3 + \binom{5}{4}\cdot 10^2\cdot(-2)^4 + \binom{5}{5}\cdot 10^0\cdot(-2)^5$$
$$= 10^5 + 5\cdot 10^4\cdot(-2) + 10\cdot 10^3\cdot 4 + 10\cdot 10^2\cdot(-8) + 5\cdot 10\cdot 16 - 32$$
$$= 100000 - 100000 + 40000 - 8000 + 800 - 32 = 32'768$$

Correction de l'exercice 2

$$(x+2)^6 = \sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}\cdot x^{6-i}\cdot(2)^i$$
$$= x^6 + 6x^5\cdot 2 + 15x^4\cdot 4 + 20x^3\cdot 8 + 15x^2\cdot 16 + 6x\cdot 32 + 64$$
$$= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$$

Correction de l'exercice 3

Trouvez le coefficient de $x^6\cdot y^7$ dans le développemt de $(x+y)^{13}$

$$(x+y)^{13} = \sum_{i=0}^{13}\binom{13}{i}\cdot x^{13-i}\cdot y^i$$

Pour avoir $x^6\cdot y^7$ il faut que i=7

Donc le coefficient sera $\binom{13}{7} = \frac{13!}{7!\cdot 6!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 7!} = 1716$

Correction de l'exercice 4

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^7 = \sum_{i=0}^{7}\binom{7}{i}\cdot x^{7-i}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^i = \sum_{i=0}^{7}\binom{7}{i}\cdot x^{7-i}\cdot\left(x^{-1}\right)^i\cdot(-1)^i$$
$$= \sum_{i=0}^{7}\binom{7}{i}\cdot x^{7-2i}\cdot(-1)^i$$

$$=\binom{7}{0}\cdot x^{7-2\cdot 0}\cdot(-1)^0+\binom{7}{1}\cdot x^{7-2\cdot 1}\cdot(-1)^1+\binom{7}{2}\cdot x^{7-2\cdot 2}\cdot(-1)^2+\binom{7}{3}\cdot x^{7-2\cdot 3}\cdot(-1)^3+$$
$$\binom{7}{4}\cdot x^{7-2\cdot 4}\cdot(-1)^4+\binom{7}{5}\cdot x^{7-2\cdot 5}\cdot(-1)^5+\binom{7}{6}\cdot x^{7-2\cdot 6}\cdot(-1)^6+\binom{7}{7}\cdot x^{7-2\cdot 7}\cdot(-1)^7$$

$$= x^7 - 7x^5 + 21x^3 - 35x^1 + 35x^{-1} - 21x^{-3} + 7x^{-5} - x^{-7}$$

Correction de l'exercice 5

$$(2x^2+\frac{1}{x})^8 = \sum_{i=0}^{8}\binom{8}{i}\cdot(2x^2)^{8-i}\cdot(x^{-1})^i$$
$$= \sum_{i=0}^{8}\binom{8}{i}\cdot(2)^{8-i}\cdot(x^2)^{8-i}\cdot(x^{-1})^i$$

$$= \sum_{i=0}^{8}\binom{8}{i}\cdot(2)^{8-i}\cdot x^{16-2i}\cdot x^{-i}$$
$$= \sum_{i=0}^{8}\binom{8}{i}\cdot(2)^{8-i}\cdot x^{16-3i}$$

Puisque l'on veut seulement du x^1
on peut poser l'équation 16-3i = 1 -> i=5
et on s'intéresse uniquement à l'indice i=5 dans la somme

$$\binom{8}{5}\cdot 2^{8-5}\cdot x^1 = 56\cdot 8\cdot x = 448\cdot x \; car$$
$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 8\cdot 7 = 56$$

Donc le résultat est 448.

Correction de l'exercice 6

$$x^4\cdot(x^2-\frac{2}{x^3})^7 = x^4\cdot\sum_{i=0}^{7}\binom{7}{i}\cdot(x^2)^{7-i}\cdot\left(-2x^{-3}\right)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{7}\binom{7}{i}\cdot x^4\cdot(x^2)^{7-i}\cdot(-2)^i\left(x^{-3}\right)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} \cdot x^4 \cdot x^{14-2i} \cdot x^{-3i} \cdot (-2)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} \cdot (-2)^i \cdot x^{18-5i}$$

Puisque l'on veut seulement du x^3
on peut poser l'équation 18-5i = 3 -> i=3
et on s'intéresse uniquement à l'indice i=3 dans la somme

$$\binom{7}{3} \cdot (-2)^3 \cdot x^3 = 35 \cdot (-8) \cdot x^3 = -280 \cdot x^3$$

Donc le résultat final est -280.

<u>Correction de l'exercice 7</u>

Comme $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = 2^{10} = 1024$$

Preuve voir partie IV.a:

$$(1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 1^{n-i} \cdot 1^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

<u>Correction de l'exercice 8</u>
On a que

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^i$$

Dérivons des 2 côtés en fonction de x

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot ix^{i-1}$$

On pose x=1 et on obtient la formule

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i \ = n2^{n-1}$$

Au méthode

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i \ = \sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}\cdot i = \sum_{i=0}^{n}\frac{n\cdot(n-1)!}{(n-i)!\cdot i\cdot(i-1)!}\cdot i$$

$$= n\sum_{i=0}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-i)!\cdot(i-1)!} = n\sum_{i=0}^{n}\binom{n-1}{i-1} = n2^{n-1}$$

Correction de l'exercice 9

Soit

$$(a+b+c)^{13} = \sum_{i,j,k}\binom{13}{i\ j\ k}\cdot a^i\cdot b^j\cdot c^k$$

$$avec\ 0\le i;j;k\le 13 \quad et \quad i+j+k=13$$

Le coefficient de $a^6\cdot b^7$ est de $\binom{13}{6\ 7\ 0} = \frac{13!}{6!\cdot 7!} = 1716$

Le coefficent de $a^6\cdot b^4\cdot c^3$ est de $\binom{13}{6\ 4\ 3} = \frac{13!}{6!\cdot 4!\cdot 3!} = 60060$

Correction de l'exercice 10

Développons

$$(a-2b+c)^5 = \sum_{i,j,k}\binom{5}{i\ j\ k}\cdot a^i\cdot(-2b)^j\cdot c^k$$

$$avec\ 0\le i;j;k\le 5 \quad et \quad i+j+k=5$$

$$= \binom{5}{5\,0\,0}\cdot a^5\cdot(-2b)^0\cdot c^0 + \binom{5}{0\,5\,0}\cdot a^0\cdot(-2b)^5\cdot c^0 + \binom{5}{0\,0\,5}\cdot a^0\cdot(-2b)^0\cdot c^5 +$$

$$\binom{5}{4\,1\,0}\cdot a^4\cdot(-2b)^1\cdot c^0 + \binom{5}{1\,4\,0}\cdot a^1\cdot(-2b)^4\cdot c^0 +$$

$$\binom{5}{0\,4\,1}\cdot a^0\cdot(-2b)^4\cdot c^1 + \binom{5}{0\,1\,4}\cdot a^0\cdot(-2b)^1\cdot c^4 +$$

$$\binom{5}{4\,0\,1}\cdot a^4\cdot(-2b)^0\cdot c^1 + \binom{5}{1\,0\,4}\cdot a^1\cdot(-2b)^0\cdot c^4 +$$

$$\binom{5}{3\,2\,0}\cdot a^3\cdot(-2b)^2\cdot c^0 + \binom{5}{2\,3\,0}\cdot a^2\cdot(-2b)^3\cdot c^0 +$$

$$\binom{5}{0\,3\,2}\cdot a^0\cdot(-2b)^3\cdot c^2+\binom{5}{0\,2\,3}\cdot a^0\cdot(-2b)^2\cdot c^3+$$
$$\binom{5}{3\,0\,2}\cdot a^3\cdot(-2b)^0\cdot c^2+\binom{5}{2\,0\,3}\cdot a^2\cdot(-2b)^0\cdot c^3+$$
$$\binom{5}{3\,1\,1}\cdot a^3\cdot(-2b)^1\cdot c^1+\binom{5}{1\,3\,1}\cdot a^1\cdot(-2b)^3\cdot c^1+\binom{5}{1\,1\,3}\cdot a^1\cdot(-2b)^1\cdot c^3+$$
$$\binom{5}{2\,2\,1}\cdot a^2\cdot(-2b)^2\cdot c^1+\binom{5}{2\,1\,2}\cdot a^2\cdot(-2b)^1\cdot c^2+\binom{5}{1\,2\,2}\cdot a^1\cdot(-2b)^2\cdot c^2$$

$$= a^5+(-2b)^5+c^5+$$
$$5a^4\cdot(-2b)^1+5a^1\cdot(-2b)^4+$$
$$5(-2b)^4\cdot c^1+5(-2b)^1\cdot c^4+$$
$$5a^4\cdot c^1+5a^1\cdot c^4+$$
$$10a^3\cdot(-2b)^2+10a^2\cdot(-2b)^3+$$
$$10(-2b)^3\cdot c^2+10(-2b)^2\cdot c^3+$$
$$10a^3\cdot c^2+10a^2\cdot c^3+$$
$$20a^3\cdot(-2b)^1\cdot c^1+20a^1\cdot(-2b)^3\cdot c^1+20a^1\cdot(-2b)^1\cdot c^3+$$
$$30a^2\cdot(-2b)^2\cdot c^1+30a^2\cdot(-2b)^1\cdot c^2+30a^1\cdot(-2b)^2\cdot c^2$$

$$= a^5-32b^5+c^5-10a^4b+80ab^4+80b^4c-10bc^4+$$
$$5a^4c+5ac^4+40a^3b^2-80a^2b^3+-80b^3c^2+40b^2c^3+$$
$$10a^3c^2+10a^2c^3-40a^3bc-160ab^3c-40abc^3+$$
$$120a^2b^2c-60a^2bc^2+120ab^2c^2$$

Petit test sur ce développement si a=1 , b=1 et c=1

A gauche = 0

A droite $= 1-32+1-10+80+80-10+$
$5+5+40-80-80+40+$
$10+10+-40-160-40+$
$120-60+120=0 \quad ok$

Que Dieu vous inspire et vous garde !